වෘත්ත චලිතය

(1) ස්කන්ධය m වූ පබළුවක් සිරස් තලයක අචල ව සවි කරන ලද අරය a වූ වෘත්තාකාර සුමට කම්බියකට අමුණා ඇත. පබළුවට ආදා ඇති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් කම්බියේ කේන්ද්‍රයෙහි පිහිටි අචල සුමට මුද්දක් තුළින් ගොස් නිදහස් ව එල්ලෙන ස්කන්ධය M වූ අංශුවක් දරයි. කම්බියේ පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\sqrt{kga}$ වේගයකින් පබළුව ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලබයි. පබළුව කම්බියේ මුදුනට නැගීමට අවශ්‍ය k හි අඩුතම අගය සොයන්න. $k = 6$ යයි ගනිමින් M, m හා 7m අතර පිහිටයි නම් චලිතයේ යම් අවස්ථාවක දී පබළුව හා කම්බිය ප්‍රතික්‍රියාව අතුරුදහන් වන බව පෙන්වන්න. (1975)

(2) m ස්කන්ධය ඇති අංශුවක් දිග 2a වූ ද, භේදක ආතතිය 10 වූ ද, ලුහු අප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවකින් A අචල ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා තිබෙයි. ආරම්භයේ දී A ට සිරස් ලෙස පහලින් එල්ලෙමින් තිබෙන අංශුවට $4\sqrt{ag}$ වේගයකින් තිරස් ලෙස ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. ඉක්බිත් ඇතිවන චලිතයේ දී තන්තුව නොකැඩෙන බව පෙන්වන්න. තන්තුව තිරස් වත්ම A ට a දුරක් ඈතින් පිහිටි P අචල නාදත්තෙක ගැටී අංශුව P වටා භ්‍රමණය වීම පටන් ගනියි නම් නාදත්තේ ගැටුන විගස එම තන්තුව කැඩෙන බව පෙන්වන්න. (1977)

(3) අංශුවක් a අරයෙන් යුත් සුමට සිරස් වෘත්තයෙක ඇතුළු පැත්ත මත චලනය වෙයි. වෘත්තයේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ දී $\sqrt{\frac{7ag}{2}}$ ප්‍රවේගයෙන් වෘත්තය දිගේ අංශුව ප්‍රක්ෂේප කළහොත් එය වෘත්තයෙන් ඉවත් වන බව පෙන්වා එසේ වන්නේ කොතැනදී දැයි සොයන්න. ඉන් ඉක්බිති ඇතිවන චලිතයේ දී අංශුව වෘත්තයේ පහළම ලක්ෂ්‍ය හරහා යන බවත් පෙන්වන්න. (1979)

(4) m ස්කන්ධය ඇති අවල අංශුවක් අවල ලක්ෂ්‍යයකට සවිකළ ℓ දිගැති තන්තුවකින් නිශ්චලතාවෙන් එල්ලෙයි. මෙ අංශුවට තිරස් දිශාවකට u වේගයක් දෙනු ලැබෙයි. තන්තුව යටියත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට v වේගයත් T ආතතියත් සඳහා ප්‍රකාශය සොයන්න.

i) $u^2 < 2gl$ නම් θ හි 0 ත් 90^0 ත් අතර පිහිටි අගය සඳහා $v = 0$ ද T ධන වන සේ $\theta = \alpha_1$ අගයක් පවත්නා බවත්,

ii) $2gl < u^2 < 5gl$ නම්, θ හි 90^0 ත් 180^0 ත් අතර පිහිටි අගය සඳහා $T = 0$ වන සේද v අතුරුදහන් නොවන සේ ද $\theta = \alpha_2$ අගයක් පවත්නා බවත්,

iii) $u^2 > 5gl$ නම්, θ හි ඕනෑම අගයක් සඳහා T ධන බව හා v අතුරුදහන් නොවන බවත් පෙන්වන්න.

ඉහත එක් එක් අවස්ථාවිදී අංශුවේ චලිතය විස්තර කරන්න. (1980)

(5) a අරයෙන් යුතු අවල සුමට ගෝලීය කබොලක් තුළ චලනය වීමට නිදහසේ ඇති අංශුවක්, කබොලේ පහළම P ලක්ෂ්‍යයේ සිට, $\sqrt{\lambda ag}$ ප්‍රවේගයෙන් තිරස් ලෙස ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. $2 < \lambda < 5$ නම් අංශුව ඉහළම ලක්ෂ්‍යයට එළැඹීමට පෙර කබොළ හැර යන බවත් අනතුරුව ඇතිවන චලිතයේ දී එය P ට ඉහළින් $\frac{a}{54}$ $(8-\lambda)(1+\lambda)^2$ උසකට එළැඹෙන බවත් පෙන්වන්න. (1980)

(6) ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් අවල ලෙස සවිකර තිබේ. එහි අනෙක් කෙළවර ඇඳා ඇති ගලක් සිරස් වෘත්තයක් ඔස්සේ භ්‍රමණය වන සේ පද්දනු ලැබේ. ගල විෂ්කම්භයක දෙකෙළවරෙහි පිහිටි විට තන්තුවේ ඇතිවන ආතතිවල ඓක්‍ය සියලුම විෂ්කම්භ සඳහා එකම වන බව පෙන්වන්න. වෘත්තය a අරයෙන් යුක්ත යැයි දී ඇති විට, ගල වෘත්තය ඔස්සේ ගෙන යාමට පහළම ලක්ෂ්‍යයේ දී අවශ්‍ය වන අඩුම ප්‍රවේගය සොයන්න. (1981)

(7) P අංශුවක් a දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ඇසුරෙන් O අවල ලක්ෂ්‍යයකට සබැඳ තිබේ. O ට සිරස් ලෙස ඉහළින් a උසක දී P අල්ලා තබාගෙන එය තිරස් දිශාවක් ඔස්සේ u ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ.

i) $u^2 \geq ag$ නම්, P අංශුව සම්පූර්ණ වෘත්ත ගෙවන බව පෙන්වන්න.

ii) $u^2 < ag$ නම්, P අංශුව $2\left\{\frac{a}{g}\left(1-\frac{u^2}{ag}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$ කාලයක් ගුරුත්වය යටතේ නිදැල්ලේ චලනය වන බව පෙන්වන්න. (1981)

(8) a දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක්, පිරිපුන් රළු තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලතාවෙහි තිබෙන M ස්කන්ධයෙන් යුත් A භාරයකට ඇඳා තිබෙයි. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර m ස්කන්ධයෙන් යුත් B අංශුවකට ඇඳා තිබෙයි. B අංශුව A සිට a දුරකින් අල්ලා තබා ගෙන සිරස් ලෙස උඩු අතට u $\left(3 \leq \frac{u^2}{ag} \leq 6\right)$ ප්‍රවේගයෙන් මේසයේ සිට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. A භාරය නිශ්චලතාවෙහි ඇතැයි උපකල්පනය කර, AB තන්තුව තිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න. A භාරය මත මේසයෙහි අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව $Mg\left[1-\frac{m}{M}\sin\theta\left(\frac{u^2}{ag}-3\sin\theta\right)\right]$ බව පෙන්වන්න. මේ ප්‍රකාශනයේ අඩුතම අගය සොයන්න.

මේ නයින් $\frac{M}{m} > \frac{l}{12}\left(\frac{u^2}{ag}\right)^2$ නම් B අර්ධ වෘත්තයක් ගෙවා යත්ම A භාරය මේසයත් සමඟ ස්පර්ශ වී පවත්නා බව පෙන්වන්න. (1983)

(9) ස්කන්ධය m වන අංශුවක්, ස්කන්ධය M වන පියන වසන ලද පෙට්ටියක පියනෙන් එල්ලෙමින් පවතින දිග a වන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකට අමුණා ඇත. පෙට්ටිය රළු තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලව තබා ඇත. තන්තුව තද ව සිටින සේ අංශුව පියනට ලංව තබා මුදා හරිනු ලැබේ. පෙට්ටිය චලනය නොවේ යැයි උපකල්පනය කරමින් මේසයෙන් පෙට්ටියට ඇති කරන ලද ඝර්ෂණ බලය හා අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. පෙට්ටිය ඇල නොවී පවතී යැයි උපකල්පනය කර පෙට්ටිය ලිස්සා නොයාමට අවශ්‍යතාව, $\mu > \frac{3m}{2\sqrt{\{M(M+3m)\}}}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු පෙට්ටිය හා මේසය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ. (1984)

(10) අචල තිරස් වෘත්ත සිලින්ඩරයක සුමට පෘෂ්ඨයේ A ලක්ෂ්‍යයක අංශුවක් වෙයි. එම අංශුව සිලින්ඩරයේ අක්ෂයට ලම්බ තලයක් මත සිලින්ඩරයට ඇති ස්පර්ශකය දිගේ වූද සිලින්ඩරයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයෙන් ඈත් වන දිශාවට වූද u ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. A ලක්ෂ්‍යය පිහිටියේ සිලින්ඩරයේ අක්ෂයෙහි මට්ටමේ සිට h උසිනි. $u^2 > gh$ නම්, අංශුව වහාම පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වන නමුත් $u^2 < gh$ නම්, එය පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වන්නේ A හි මට්ටමේ සිට $\frac{l}{3g}(gh - u^2)$ ගැඹුරක දී බව පෙන්වන්න. තවද, අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වන මොහොතේ දී එහි ප්‍රවේගය $\sqrt{\frac{1}{3}(2gh + u^2)}$ බවත් දක්වන්න. (1985)

(11) අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ආඳන ලද පබළු දෙකක් සිරස් තලයක සවි කරන ලද සුමට වෘත්තාකාර කම්බියක් දිගේ සර්පණය වීමට නිදහස් ය. ඒවායේ ස්කන්ධ m හා M(>m) වෙයි. තන්තුව ඇදී තිබෙන විට එය කේන්ද්‍රයේ 2α කෝණයක් ආපාතනය කරයි. ආරම්භයේ දී පබළු නිශ්චලව පිහිටන ලෙසත් තන්තුව කේන්ද්‍රයට ඉහළින් තිරස්ව පිහිටන ලෙසත් තබා මුදා හරිනු ලැබේ. තන්තුව තිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}\left[\cos\alpha - \frac{M\cos(\theta+\alpha) + m\cos(\theta-\alpha)}{M+m}\right]$ බව පෙන්වන්න. මෙහි a වෘත්තාකාර කම්බියේ අරයයි. එමගින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, තන්තුව සිරස් වන්නට පෙර එහි ආතතිය $\frac{2M\,mg\tan\alpha\cos\theta}{M+m}$ බව පෙන්වන්න. (1986)

(12) O කේන්ද්‍රය හා a අරය සහිත අචල සුමට ඝන ගෝලයෙක පෘෂ්ඨය මත A නම් ලක්ෂ්‍යයෙක P නම් බර අංශුවක් රඳවා තබා පසුව එය මුදා හරිනු ලැබේ. මෙහි A ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ උඩු සිරස සමඟ OA රේඛාව α සුළු කෝණයක් සාදන අන්දමටය. OP රේඛාව උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට අංශුව ගෝල පෘෂ්ඨය මත තව දුරටත් තිබුණ හොත් අංශුවේ ප්‍රවේගය $\sqrt{2ag(\cos\alpha - \cos\theta)}$ බව පෙන්වා මෙම මොහොතේ දී අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. එනයින් OP රේඛාව උඩු සිරස සමඟ $\cos^{-1}\left(\frac{2\cos\alpha}{3}\right)$ කෝණයක් සාදන විට අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවතට යන බව පෙන්වන්න. (1988)

(13) දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් R නම් කුඩා සුමට අචල මුදුවක් තුළින් ගමන් කරයි. ස්කන්ධයෙන් m සහ λm ($\lambda > 1$) වන P සහ Q අංශුන් තන්තුවේ කෙළවරට ගැට ගසා ඇත. කේන්ද්‍රය ලෙස ඇති C ලක්ෂ්‍යයක් වටා ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයකින් P අංශුව තිරස් වෘත්තයක් ගෙවා යයි. R ට සිරස් ලෙස පහළින් C පිහිටයි නම් හා C හිදී Q නිශ්චලතාවේ පවතී නම්

i) $\omega^2 = \frac{g(1+\lambda)}{l}$ සහ

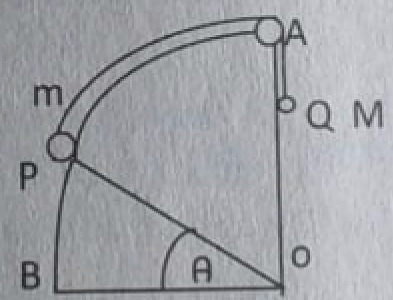
ii) තන්තුව මුදුව මත mg $\sqrt{2\lambda(1+\lambda)}$ විශාලත්වයෙන් යුත් බලයක් යොදන බව පෙන්වන්න. (1989)

(14) ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් අභ්‍යන්තර අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වන අචල කුහර ගෝලයක සුමට ඇතුලත පෘෂ්ඨය මත සිරස් වෘත්තයක චලනය වේ. වෘත්තයේ තලය O හරහා යනු ලැබේ. අංශුව u තිරස් ප්‍රවේගයකින් ගෝලයේ පහලම ලක්ෂ්‍යයේ සිට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. OP රේඛාව උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය V ද අංශුව සහ ගෝලය අතර ප්‍රතික්‍රියාව R ද නම් $v^2 = u^2 - 2ag(1 + \cos\theta)$ සහ $R = \frac{m}{a}\{u^2 - ag(2 + 3\cos\theta)\}$ බව පෙන්වන්න. $u^2 = (2+\sqrt{3})ag$ නම් $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ තැනදී අංශුව ගෝලයෙන් ඉවත් වන බව ද එහි පරාවක්‍රය O හරහා යන බවද පෙන්වන්න. (1989)

(15) i) m ස්කන්ධයෙන් යුතු P නම් අංශුවක් l දිගැති ලුහු තන්තුවක් මඟින් A අචල ලක්ෂ්‍යයට ඈදා තිබෙයි. A ට පහළින් $l\cos\alpha$ ගැඹුරකදී $l\sin\alpha$ අරය සහිත තිරස් වෘත්තාකාර කක්ෂයක් ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයක් සහිතව P අංශුව සළකුණු කරයි. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

ii) m ස්කන්ධය සහිත උප ග්‍රහයෙක් අරය b සහිත වෘත්තාකාර කක්ෂයක් පොළොවෙහි සමක තලයේ සළකුණු කරයි. පොළොව හා උපග්‍රහයා එකිනෙකට ආකර්ෂණය වන්නේ $\frac{\gamma Mn}{r^2}$ යනුවෙන් දැක්වෙන බලයකිනි. මෙහි M යනු පොළොවේ ස්කන්ධය ද r යනු උපග්‍රහයාත් පොළොවත් අතර දුර ද γ යනු නියතයක් ද වෙයි. පොළොව භ්‍රමණය වන්නේ ω කෝණික ප්‍රවේගයක් සහිත ව නම් පොළොවට සාපේක්ෂව උපග්‍රහයා නිශ්චලතාවේ පිහිටන්නේ $b = \left(\frac{\gamma M}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ වන විට බව පෙන්වන්න. (1990)

(16) රූපයෙන් දැක්වෙන්නේ සුමට අචල ඝන වස්තුවකින් තනා ගත් වෘත්ත පාදයක සිරස් කඩකි. එහි මුදුනේ A නම් සුමට කප්පියක් උඩින් වැටී ඇති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට පිළිවෙලින් m හා M(M>m) ස්කන්ධ සහිත P හා Q අංශු දෙකක් ඈදා තිබෙයි. OP (OB එල්ලේ) තිරස් වන විට චලිතය ආරම්භ කරයි නම්,



$(M+m)a\dot{\theta}^2 = 2g(M\theta - m\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු t කාලයේදී OP හා OB අතර කෝණය වේ. ඒ නයින් P අංශුවත් වක්‍ර පෘෂ්ඨයත් අතර ප්‍රතික්‍රියාව

i) $M < 3m$ ලෙස පවතින අවස්ථාවේ $\cos\alpha = \frac{2M}{M+3m}$ යනුවෙන් දැක්වෙන α අගයට අනුව $\theta = \alpha$ වන විට උපරිමය වන බවත්

ii) $\frac{3m}{M} < (\pi - 1)$ ලෙස පවතින අවස්ථාවේ $\theta = 0$ හෝ $\sin\beta = \frac{2M\beta}{M+3m}$ සමීකරණය තෘප්ත කරන β අගයට අනුව $\theta = \beta$ හෝ වන විට අතුරුදහන් වන බවත්, පෙන්වන්න. (1990)

(17) A හා B යනු Bට ඉහළින් A ද ඒවා අතර c පරතරයක් ද තිබෙන සේ එකම සිරස් රේඛාවේ පිහිටි අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. නිදහසේ චලනය විය හැකි C නම් බර කුඩා

මුදුවක් තුළින් යැවූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟින් එම ලක්ෂ්‍ය සම්බන්ධ කර තිබෙයි. C මුදුව ω නියත කෝණික වේගයක් ඇතිව AB මත කේන්ද්‍රය පිහිටන තිරස් වෘත්තයක් සලකුණු කරන විට A හිත් B හිත් සිට C ට දුර පිළිවෙලින් b හා a වෙයි. $b > a$ බවත් ω^2 යන්න $(\cos A - \cos B)\,\omega^2 = g\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ මඟින් දෙනු ලබන බවත් පෙන්වන්න. මෙහි A හා B මඟින් පිළිවෙලින් $B\hat{A}C$ හා $A\hat{B}C$ දක්වනු ලැබෙයි. තව දුරටත් $\omega^2 = \frac{2gc}{b-a}\ \frac{a+b}{\{(a+b)^2-c^2\}}$ බව පෙන්වීමට ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා කෝසයින් සූත්‍රය භාවිත කරන්න. (1991)

(18) දිග a වන OP ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකට ගැට ගසා ඇති ස්කන්ධය m වන P අංශුවක්, තන්තුව ඇදී පවතිමින් කේන්ද්‍රය O වන පූර්ණ සිරස් වෘත්තයක භ්‍රමණය වෙයි. පහළම පිහිටීමේ දී P හි ප්‍රවේගය V නම් OP රේඛාව යටි සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට තන්තුවේ T ආතතිය
$T = \frac{m}{a}[V^2 - 2ag + 3ag\cos\theta]$ යන්නෙන් ලැබෙන බවත් $V^2 > 5ag$ බවත් පෙන්වන්න. තවද, ඉහළම පිහිටීමේ දී P හි ප්‍රවේගය $\frac{V}{2}$ නම් V නිර්ණය කර P අංශුව පහළම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතියේත් ඉහළම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතියේත් අනුපාතය 19: 1 බව පෙන්වන්න. (1991)

(19) දිග a වූ සැහැල්ලු අවතන්‍ය තන්තුවක එක කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇති අතර P අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් සම්බන්ධ කරනු ලැබ, තන්තුව සිරස්ව එල්ලෙමින් නිසලව පවතී. අංශුව $\sqrt{\lambda ag}$ තිරස් වේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. තන්තුව ඇදී පවති යැයි ද චලිතය O හරහා යන සිරස් තලයක සිදුවේ යැයිද උපකල්පනය කරමින් තන්තුව θ කෝණයකින් හැර ඇතිවිට අංශුවේ v වේගය
$V^2 = 4ag\left[\frac{\lambda}{4} - \sin^2\theta/2\right]$ මඟින් ද තන්තුවේ ආතතිය
$T = 6mg\left[\frac{\lambda+1}{6} - \sin^2\theta/2\right]$ මඟින් ද දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙම රාශි දෙකම සමගාමීව ශූන්‍ය වන λ හි අගය කුමක් ද? ඒ නයින් ,

i) $0 < \lambda < 2$ නම් තන්තුව ඇදී පවතිමින් අංශුව ක්ෂණික නිශ්චලතාවට පැමිණෙන බව පෙන්වා, මෙය සිදුවන විට θ හි අගය λ ඇසුරෙන් සොයන්න.

ii) $2 < \lambda < 5$ නම් අංශුව චලනය වෙමින් තිබියදී තන්තුව බුරුල්වන බව පෙන්වා මෙය සිදුවන විට θ හි අගය λ ඇසුරෙන් සොයන්න.

iii) $\lambda \geq 5$ නම් අංශුව සම්පූර්ණ වෘත්ත චලිතයක යෙදෙන බව පෙන්වන්න.

(20) සුමට පටු කුහර බටයක්, කේන්ද්‍රය O ද අරය a ද වූ වෘත්තයෙක හැඩයට නමා එහි තලය සිරස්ව තිබෙන සේ සවි කර ඇත. පිළිවෙලින් ස්කන්ධය m හා km වන P හා Q අංශු දෙක $\frac{\pi a}{2}$ දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟින් ඈඳා බටය තුළ තබා ඇත්තේ O ට සිරස් ලෙස ඉහළින් P ද O හා එකම මට්ටමක Q ද පිහිටන පරිදි ය. තන්තුව බටය තුළ වෙයි. t = 0 කාලයේ දී පද්ධතිය නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබෙයි. t කාලයෙක දී OP උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම් යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය උපයෝගී කරගෙන තන්තුව නොබුරුල් ව පවතුනහොත් $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{a(1+k)}(\sin\theta + k\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ විට පමණක් ඉහත සමීකරණය වලංගු වන බව අපෝහනය කරන්න. P අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $k > 3 - 2\sqrt{2}$ නම් තන්තුව බුරුල් වීමට පෙර ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව වෙනස් වන බව පෙන්වන්න. (1992)

(21) අ) කේතු අවලම්බයක බට්ටාගේ වේගය V ද එය චලනය වන වෘත්තයේ අරය r ද වේ. තන්තුවේ දිග l නම $V^2 = \frac{gr^2}{\sqrt{l^2-r^2}}$ බව පෙන්වා පරිභ්‍රමණ කාලය සොයන්න.

ආ) ස්කන්ධය m වූ පබළුවක්, සිරස් තලයක සවිකොට ඇති අරය a වූ සුමට වෘත්තාකාර කම්බියක අමුණා ඇත. පබළුව u වේගයකින් කම්බියේ පහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. පබළුවේ දෛශික අරය යටියත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට කම්බියේ පිට් අතට ප්‍රතික්‍රියාව R වෙයි නම්, $R = mg\left[2 - 3\cos\theta - \frac{u^2}{ag}\right]$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. පබළුව ඉහළම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවීම සඳහා, u හි අඩුතම අගය ද සොයන්න. (1993)

(22) P අංශුවක් Oxy තලයේ පිහිටි අරය a ද කේන්ද්‍රය O ද වූ වෘත්තයක චලනය වෙයි. P ගේ ත්වරණයේ අරීය සංරචකයත් තිර්යක් සංරචකයත් පිළිවෙලින් $-a\dot{\theta}^2$ හා $a\ddot{\theta}$ වන බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු OP ත් x අක්ෂයත් අතර කෝණයයි. a අරයෙන් හා O කේන්ද්‍රයෙන් යුත් සුමට අර්ධ ගෝලයක් එහි පතුල තිරස් තලයක පිහිටන සේ සවිකර තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුත් P නම් බර අංශුවක් අර්ධගෝලයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ නිසලව තිබී මදක් විස්ථාපනය කළ පසු අර්ධගෝලයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ මත සර්පණය වෙයි. OP අරය උඩු සිරස සමඟ θ $(<\frac{\pi}{2})$ කෝණයක් සාදන විට

i) P ගේ ප්‍රවේගයත්

ii) P මත ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න.

අංශුව අර්ධගෝලයේ පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත්ව යන විට P ගේ ප්‍රවේගයේ තිරස් සංරචකයත් සිරස් සංරචකයත් පිළිවෙලින් $\frac{\sqrt{24ag}}{9}$ ද $\sqrt{\frac{30ag}{9}}$ ද බව පෙන්වන්න. (1994)

(23) m ස්කන්ධයෙන් යුත් කුඩා P මුදුවකට සිරස් තලයක සවිකර තිබෙන කේන්ද්‍රය O ද අරය a ද වන සුමට වෘත්තාකාර කම්බියක සර්පණය වීමට නිදහස ඇත. කම්බියේ ඉහළම A ලක්ෂ්‍යයට මුදුව ඈඳා ඇත්තේ ස්වාභාවික දිග a ද ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg ද වන ලුහු ප්‍රත්‍යස්ත තන්තුවක් මගිනි. මුදුව කම්බියේ පහළම B ලක්ෂ්‍යයේ තබා කම්බියට ස්පර්ශක දිශාවකට u $(>\sqrt{2ag})$ තිරස් ප්‍රවේගයක් එයට දෙනු ලැබෙයි. t වේලාවේදී $B\hat{O}P = \theta$ ලෙස ගෙන ස්පර්ශක දිශාව ඔස්සේ අංශුව සඳහා චලිත සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ විට $a^2\dot{\theta}^2 = u^2 - 4ag\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න. තව ද $u \leq \sqrt{3ga}$ වෙයි නම් මුදුව ක්ෂණික නිශ්චලතාවට පත්වන්නේ OP රේඛාව උඩු සිරස සමඟ $\cos^{-1}\left(\frac{u^2-ga}{ag}\right)$ කෝණයක් සාදන බවත් පෙන්වන්න.

(1996)

(24) ළමා උයනක තිබෙන ඔන්චිල්ලාවක් සැහැල්ලු සිහින් AB ලෑල්ලකින් හා එකම තිරස් මට්ටමෙහි පිහිටි A'B'අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සවිකරන ලද එක එකක දිග l බැගින් වූ දිග සිරස් සැහැල්ලු AA', BB' සමාන කඹ දෙකකින් සමන්විත වේ. ස්කන්ධය m වූ ළමයෙක් ඔහුගේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G ලෑල්ල මත පිහටන පරිදි ලෑල්ලේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය මත ඉඳගෙන සිටී. ලෑල්ලට ABB'A'තලයට ලම්බව තිරස් u $(<\sqrt{2gl})$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ.

i) ළමයා ඔන්චිල්ලාවට සාපේක්ෂව නිසලව ඉඳගෙන සිටී. θ යනු ABB'A' හි සිරසට ආනතිය විට කඹයේ ආතතිය T, $\frac{T}{mg} = \frac{u^2}{2gl} + \frac{3}{2}\cos\theta - 1$ යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ii) ඔන්චිල්ලාව $\theta = \alpha$ ක්ෂණික නිසලතා පිහිටීමට පැමිණි විට ළමයා සක්‍රිය වී ABB'A'තලයේ ලෑල්ල මත වහාම සිටගෙන ඉන්පසු ක්‍රමයෙන් පහත් වී ඔන්චිල්ලාව $\theta = O$ සිරස් පිහිටීමට ආපසු පැමිණෙත්ම ඉඳගත් ඉරියව්වට එයි. ඔන්චිල්ලාවේ කෝණික විස්තාරය α සිට β දක්වා වැඩි වන බව පෙන්වන්න. මෙහි $\cos\beta = \left(1 - \frac{h}{l}\right)\cos\alpha$ වන අතර h යනු ළමයා ලෑල්ල මත සිටගෙන ඉන්නා විට ලෑල්ලේ සිට G ට ඇති දුර වේ. ළමයා විසින් වැය කරන ලද ශක්තිය කොපමණ ද? (1997)

(25) ස්කන්ධය M ද පාදයක දිග 2a ද වූ ඒකාකාර කුහර ඝනකාකාර පෙට්ටියක් රළු තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලතාවේ තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුත් බට්ටෙක් සහිත $l (< a)$ දිගැති සරල අවලම්බයක් පෙට්ටියේ උඩ මුහුණතේ මධ්‍යලක්ෂ්‍යයේ එල්ලා ඇත. අවලම්බය උඩ මුහුණතේ ගැටෙන්නේ නැතිව සිරසෙන් දෙපසට සෘජුකෝණ සාදමින් දෝලනය වෙයි. අවලම්බය සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට තන්තුවේ ආතතිය T සොයන්න. පිළිවෙළින් සර්ෂණ බලය හා පෙට්ටියත් මේසයත් අතර අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව F හා R නම්, $\frac{F}{R} = \frac{\sin 2\theta}{\lambda + \cos}$ බව සාධනය කරන්න.

මෙහි $\lambda = 1 + \frac{2M}{3M}$ μ යනු මේසයත් පෙට්ටියත් අතර සර්ෂණ සංගුණකය විට $\mu \geq \frac{3m}{2\sqrt{M(M+3m)}}$ බව අපෝහනය කරන්න. (1998)

(26) කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අචල සුමට කුහර ගෝලයක ඇතුළත පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ ඇති P අංශුවක්, $2ga < u^2 < 5ga$ වන පරිදි වූ u වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. OP රේඛාව θ කෝණයකින් හැරී ඇතිවිට අංශුව තවම ගෝලයේ පෘෂ්ඨය සමඟ ස්පර්ශ වී ඇත්නම් එහි වේගය සොයන්න. තිරස සමඟ $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{u^2 - 2ga}{3ga}\right)$ සුළු කෝණයක් සාදන දිශාවකට උඩු අතට චලනය වෙමින් තිබියදී, $v = \sqrt{\frac{u^2 - 2ga}{3}}$ වේගයෙන් අංශුව ගෝලයේ පෘෂ්ඨයෙන් ඉවතට යන බව පෙන්වන්න. ඉන්පසුව ගුරුත්වය යටතේ කෙරෙන නිදහස් චලිතයේදී අංශුව ගෝලයේ O කේන්ද්‍රය හරහා යයි නම් $\tan^2 a = 2$ බවත් $u^2 = (2+\sqrt{3})\, ga$ බවත් පෙන්වන්න. (1999)

(27) ස්කන්ධය m වූ කුඩා P පබළුවක් සිරස් තලයක සවිකර ඇති අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වූ සුමට වෘත්තාකාර කම්බියක අමුණා ඇත. පබළුව ආරම්භයේදී කම්බියේ පහත්ම A ලක්ෂ්‍යයේ තබා කම්බිය දිගේ u වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. t කාලයේ දී OP හැරී ඇති කෝණය θ මඟින් දක්වමින් $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{u}{a}\right)^2 - \frac{2g}{a}(1 - \cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. කම්බියේ ඉහළම ලක්ෂ්‍ය කරා පබළුව යම්තම් ළඟාවන පරිදි u හි අගය සොයන්න. u හි මෙම අගය සඳහා

i) $\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{a}}\cos\frac{\theta}{2}$ බව,

ii) පබළුව හා කම්බිය අතර ප්‍රතික්‍රියාව $mg(2 + 3\cos\theta)$ බව

iii) ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව මාරු වන ලක්ෂ්‍ය කරා ළඟා වීමට පබළුව ගන්නා කාලය $\sqrt{\frac{a}{g}}\ln(\sqrt{6} + \sqrt{5})$ බව පෙන්වන්න. (2000)

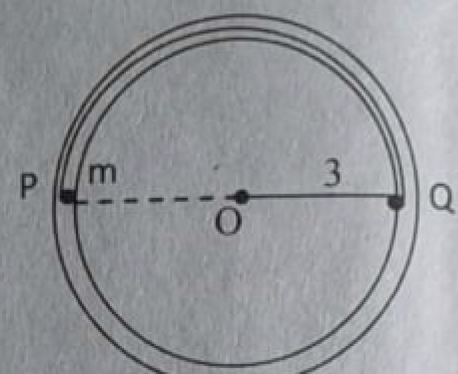
(28) කේන්ද්‍රය O සහ අභ්‍යන්තර අරය a වූ අචල කුහර ගෝලයක සුමට අන්ත: පෘෂ්ඨය මත චලනය වීමට නිදහස ඇති P අංශුවක් එම පෘෂ්ඨයේ පහත්ම A ලක්ෂ්‍යයේ තබා ඇත. ඊළඟට අංශුව ආරම්භක $\sqrt{nga}$ වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. මෙහි $n > 0$ වේ. අංශුව පෘෂ්ඨය සමඟ ස්පර්ශව තිබෙන අතරතුරේදී OP හැරෙන කෝණය θ වන විට පෘෂ්ඨයෙන් අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $2 < n < 5$ වෙයි නම් $\sqrt{\frac{(n-2)ga}{3}}$ වේගයක් සහිතව P අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත්වන බව පෙන්වන්න.

පෘෂ්ඨයෙන් P ඉවත් වන්නේ O හි මට්ටමෙන් $\frac{a}{2}$ උසක තිබියදී නම්,

i) $n = \frac{7}{2}$ බවත්

ii) ගුරුත්වය යටතේ පසුව සිදුවන නිදහස් චලිතයේ දී P හි පෙත A හරහා යන බවත් පෙන්වන්න. (2000)

(29) 1 වන රූපයෙන් දැක්වෙන්නේ කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ වෘත්තයක ආකාරයට නවන ලද පටු සුමට නලයකි. එය සිරස් තලයක සවිකර ඇත. ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m, 3m වූ P, Q අංශු දෙකක් දිග πa වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය නොබුරුල් තන්තුවකින් සම්බන්ධ කරනු ලැබ නළය තුළ බහා ඇත. ආරම්භයේ දී නලයේ තිරස් විශ්කම්භයේ ප්‍රතිවිරුද්ධ කෙළවරට අංශු ද නලයේ උඩත් භාගයෙහි තන්තුව ද තබා පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. මුදා හල මොහොතේ සිට t කාලයක දී θ කෝණයකින් O,P හැරී ඇත්නම් **ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්** $a\dot{\theta}^2 = g\sin\theta\left[0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right]$ බව පෙන්වන්න. මෙම මොහොතේ දී නලයෙන් P අංශුව මත යෙදෙන බලය සොයන්න. (2001)



(30) කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අචල ගෝලයක පිටත සුමට පෘෂ්ඨය මත වූ A ලක්ෂ්‍යයක නිශ්චලතාවයේ තබා P අංශුවක් මුදා හරිනු ලැබේ. උඩු සිරස සමඟ OA සාදන සුළු කෝණය α වෙයි. t කාලයේ දී මෙම පෘෂ්ඨය මතම තිබිය දී OP උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි.

i) $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(\cos\alpha - \cos\theta)$ බවත්

ii) අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත්ව යන්නේ $\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\alpha$ වන විට දී බවත් පෙන්වන්න.

(2002)

(31) ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් දිග a වූ සැහැල්ලු අප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක් මඟින් O අචල ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා ඇත. ආරම්භයේ දී තන්තුව නොබුරුල්ව P නිසලව තිබිය දී I ආවේගයක් OP ට ලම්බ දිශාවකට P ට යොදනු ලැබේ. ඉන්පසුව සිදුවන චලිතයේ දී යටියත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් OP සාදන විට P හි ප්‍රවේගය v ද තන්තුවේ ආතතිය T ද නම්, $v^2 = \frac{I^2}{m^2} - 2ga + 2ga\cos\theta$ සහ $T = \frac{I^2}{ma} - 2mg + 3mg\cos\theta$ බව පෙන්වන්න.

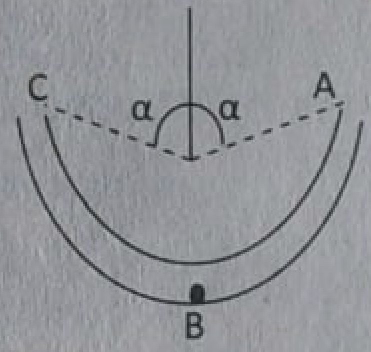
i) අංශුව පූර්ණ වෘත්තයක් ගෙවා යයි නම්, $I > m\sqrt{5ag}$ බව ද,

ii) OP රේඛාව උඩු සිරස සමඟ α සුළු කෝණයක් සාදන විට අංශුව වෘත්තාකාර චලිතයෙන් ඉවත් වේ නම්, $m\sqrt{2ga} < I < m\sqrt{5ga}$ සහ $\cos\alpha = \frac{I^2}{3m^2ga} - \frac{2}{3}$ බව ද අපෝහනය කරන්න. (2003)

(32) ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට P අංශුවකට සිරස් තලයක අචල ව ඇති අරය r හා කේන්ද්‍රය O වූ සිහින් සුමට වෘත්තාකාර බටයක් තුළ ගුරුත්වය යටතේ නිදහසේ චලනය විය හැකිය. අංශුව බටයේ පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\sqrt{3gr}$ වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කරයි. අංශුවේ චලනය සඳහා ශක්ති සංස්ථිති නියමට යොදාගත හැකි ඇයි දැයි පැහැදිලි කරන්න. OP යටිඅත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ වේගය v නම් $v^2 = gr\,(1 + 2\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. එනයින්, අංශුව මත බටයේ ප්‍රතික්‍රියාව $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ විට එහි දිශාව වෙනස්වන බව පෙන්වා ඒ ලක්ෂ්‍යයේ දී අංශුවේ වේගය සොයන්න. (2004)

(33) ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟින් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත. තන්තුව නොබුරුලව යටිඅත් සිරස සමඟ $\alpha\left[<\frac{\pi}{2}\right]$ කෝණයක් සාදන අයුරින් අංශුව රඳවා ඇතිවිට අංශුවට OP ඔස්සේ යන සිරස් තිරස් තලයෙහි තන්තුවට ලම්බව u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබෙයි. අංශුව වෘත්තාකාර චලිතයෙහි යෙදෙන බව උපකල්පනය කරමින් OP යටිඅත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන සාධාරණ පිහිටුම සැලකීමෙන් අංශුව සඳහා ශක්ති සංස්ථිති සමීකරණය ලියා දක්වන්න.
$ga\,(3 + 2\cos\alpha) > u^2 > 2ga\cos\alpha$ වෙතොත්, යටිඅත් සිරස සමඟ OP, $\cos^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(2\cos\alpha - \frac{u^2}{ga}\right)\right]$ කෝණයක් සාදන තෙක් අංශුව වෘත්තාකාර චාපයක් සලකුණු කරන බවත් අනතුරුව ගුරුත්වය යටතේ නිදහස් ව චලනයවීමට ආරම්භ කරන බවත් පෙන්වන්න. (2005)

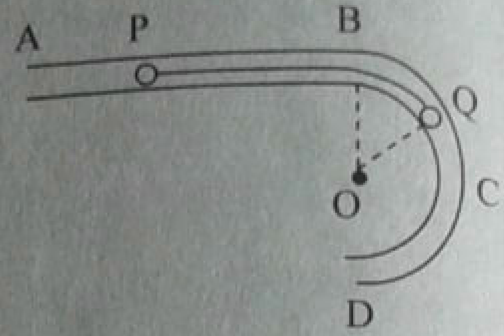
(34) රූපයෙන් දැක්වෙන්නේ කේන්ද්‍රය O අරය a සහ කෝණය $2(\pi - a)$ වූ වෘත්ත චාපයක ආකාරයට නමන ලද A,B,C සුමට සිහින් නළයකි. මෙහි α සුළු කෝණයක් වෙයි. A,C විවෘත දෙකෙළවර එකම තිරස් මට්ටමේ තිබෙන පරිදි නළය තිරස් තලයක සවිකර ඇත. නළය ඇතුළත පහත්ම B ලක්ෂ්‍යයෙහි අංශුවක් තබා නළය දිගේ තිරස් u ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව නලය දිගේ A කෙළවරට පැමිණ අනතුරුව නිදහසේ ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂිප්තයක් ලෙස චලනය වී C කෙළවරින් නැවත නළයට ඇතුළු වෙයි. අංශුව A හිදී නළයෙන් ඉවත්වන විට එහි ප්‍රවේගය සොයා $u^2 = ga[2(1 + \cos\alpha) + \sec\alpha]$ බව පෙන්වන්න. තව ද අංශුව ළඟාවන උපරිම O ට ඉහළින් $\frac{a}{2}$ $(\sec\alpha - \cos\alpha)$ බවත් පෙන්වන්න. (2006)



(35) කේන්ද්‍රය O අරය a වූ අචල ගෝලයක පිටත සුමට පෘෂ්ඨය මත A ලක්ෂ්‍යයක නිශ්චලතාවයේ සිට P අංශුවක් මුදා හරිනු ලැබේ. මෙහි OA උඩු සිරස සමඟ α සුළු කෝණයක් සාදයි. P අංශුව තවමත් ගෝලය මත තිබිය දී OP උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට $a\dot{\theta}^2 2g(\cos\alpha - \cos\theta)$ බව පෙන්වන්න. P අංශුව ගෝලයෙන් ඉවතට යන ලක්ෂ්‍යයේ දී θ හි අගය සොයන්න. (2006)

(36) O කේන්ද්‍රය සහ a අරය සහිත සුමට ගෝලයක් මේසයක තිරස් පෘෂ්ඨය මතට සවිකර ඇත. සුමට P අංශුවක් ගෝලයෙහි පිටත පෘෂ්ඨයෙහි A ලක්ෂ්‍යයක තබනු ලැබේ. මෙහි OA උඩු සිරස සමඟ α සුළු කෝණයක් සාදයි. අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.

(43) ABCD සිහින් සුමට නලයක් පහත රූපයේ දැක්වෙන ආකාරට නවා ඇත. නලයේ AB කොටස සෘජු වේ. BCD කොටසට අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අර්ධ වෘත්තාකාර හැඩයක් ඇති අතර BD විෂ්කම්භය AB ට ලම්බ වේ. AB තිරස් ව හා ඉහළින් ම ඇතිව නලය සිරස් තලයක සවි කර ඇත. නලය ඇතුළත, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය 3m වූ Q අංශුවක් $l\left(>\frac{\pi a}{2}\right)$ දිගැති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. ආරම්භයේ දී, තන්තුව ඇදී AB දිගේ තිබෙන අතර Q අංශුව B ලක්ෂ්‍යයේ තබා ඇත. Q අංශුව මෙම පිහිටීමේ සිට යන්තමින් විස්ථාපනය කරනු ලැබීමෙන් t කාලයක දී Q අරය θ සුළු කෝණයකින් හැරේ.



ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2a}(1-\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, ඡ අංශුවේ ත්වරණය $\frac{3g}{4}\sin\theta$ බව පෙන්වන්න.

t කාලයේ දී Q අංශුව මත නලයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව හා තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න. (2015)